

Chapitre 4. Fonctions réelles.

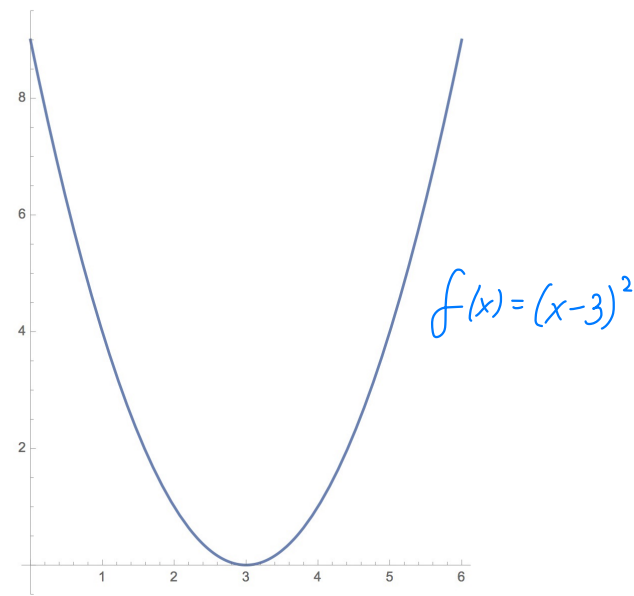
§4.1. Définitions et propriétés de base.

Déf Une fonction $f: E \rightarrow F$, où $E, F \subset \mathbb{R}$ est une application qui donne pour tout élément $x \in D(f) = E$ **un** élément $y = f(x) \in F$

$D(f)$ - domaine de définition ($= E$)

$f(D)$ - ensemble image $\subset F$

Notation $x \rightarrow f(x)$



Déf Le **graphique** de $f: E \rightarrow F$ est l'ensemble des points sur le plan $\mathbb{R}^2$ avec les coordonnées $(x, f(x))$

Remarque Si la fonction est donnée par une formule, alors $D(f)$ est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ où l'expression $f(x)$ est bien définie.

Propriétés de base.

(1) f est (strictement) croissante sur $D(f)$ si

$$\forall x_1 < x_2 \in D(f), \text{ on a } f(x_1) \leq f(x_2)$$
$$f(x_1) < f(x_2)$$

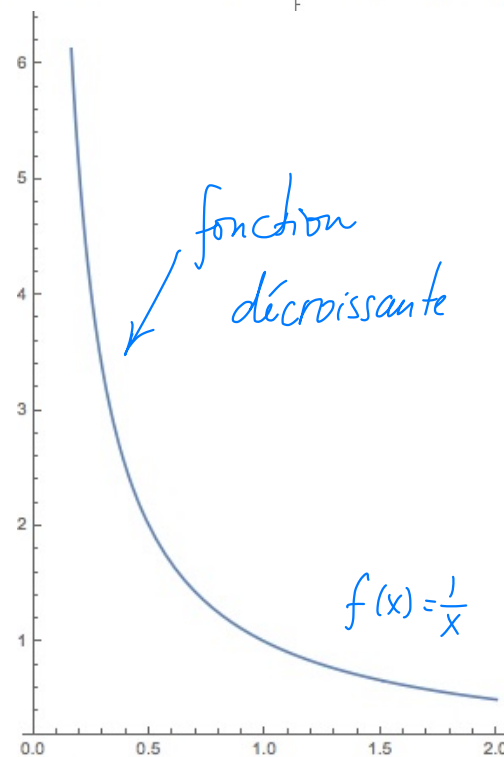
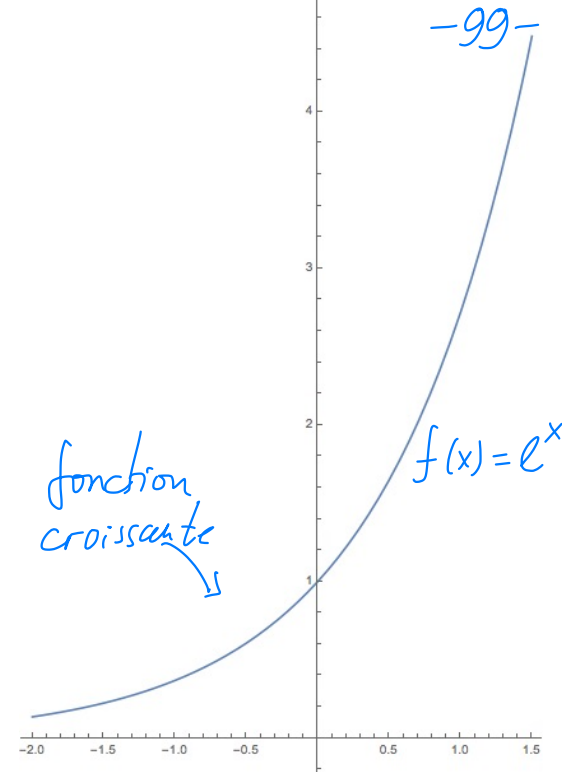
Notation: $f(x) \uparrow$

(2) f est (strictement) décroissante sur $D(f)$ si

$$\forall x_1 < x_2 \in D(f), \text{ on a } f(x_1) \geq f(x_2)$$
$$f(x_1) > f(x_2)$$

Notation: $f(x) \downarrow$

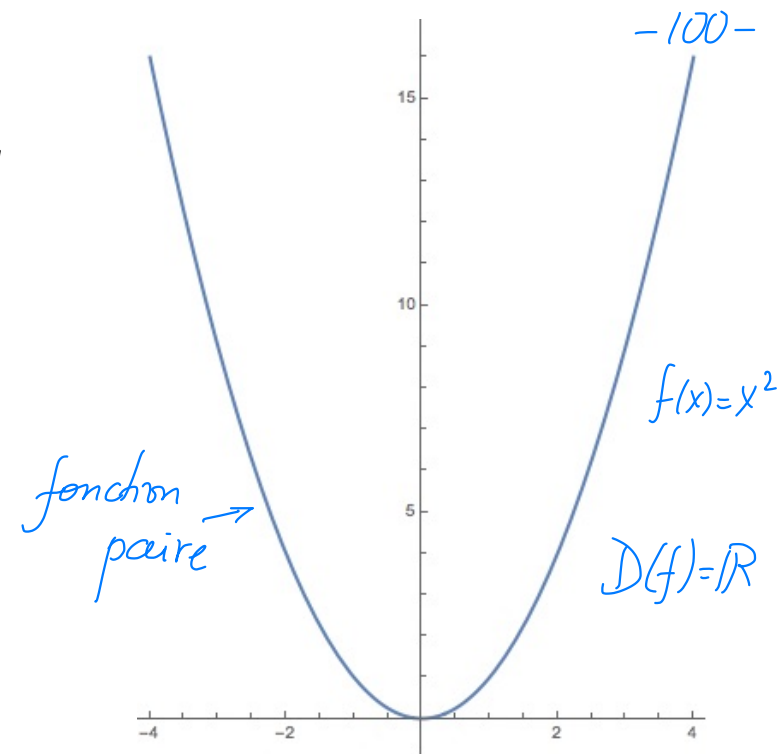
(3) Si f est (strictement) croissante sur $D(f)$ ou (strictement) décroissante sur $D(f)$, alors elle est (strictement) monotone sur $D(f)$



(4) f est paire si

$\mathcal{D}(f)$ est symétrique : $x \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow -x \in \mathcal{D}(f)$

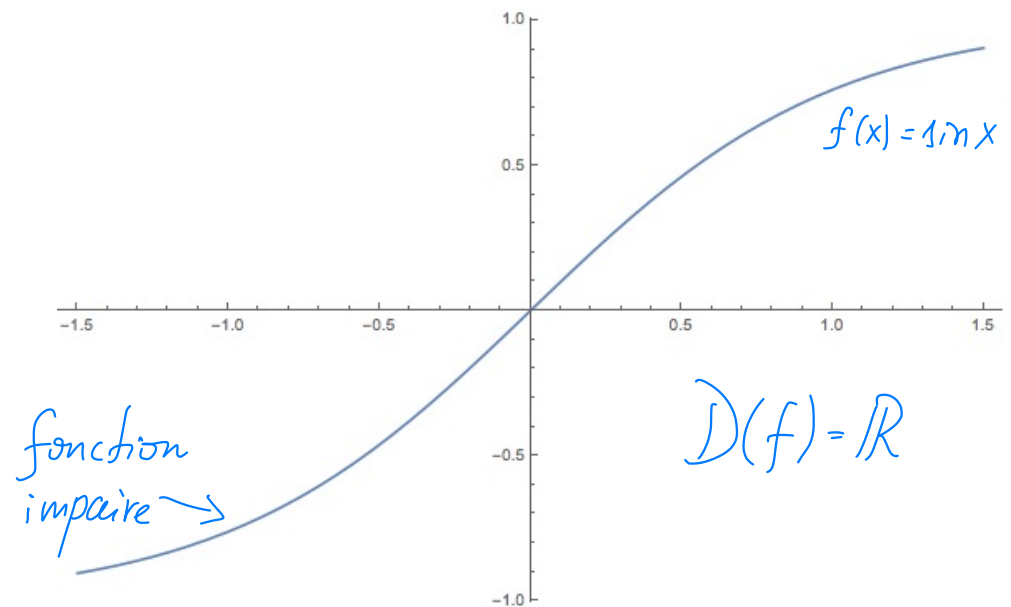
et $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$



(5) f est impaire si

$\mathcal{D}(f)$ est symétrique

et $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f)$



-101-

(6) $f: E \rightarrow F$ est périodique s'il existe $P \in \mathbb{R}^*$ tel que
 $\forall x \in E, x+P \in E$ et $f(x+P) = f(x) \quad \forall x \in E$.

P s'appelle une période de f .

Si f est périodique alors $x \in E \Rightarrow x+nP \in E \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow E$ n'est pas borné.

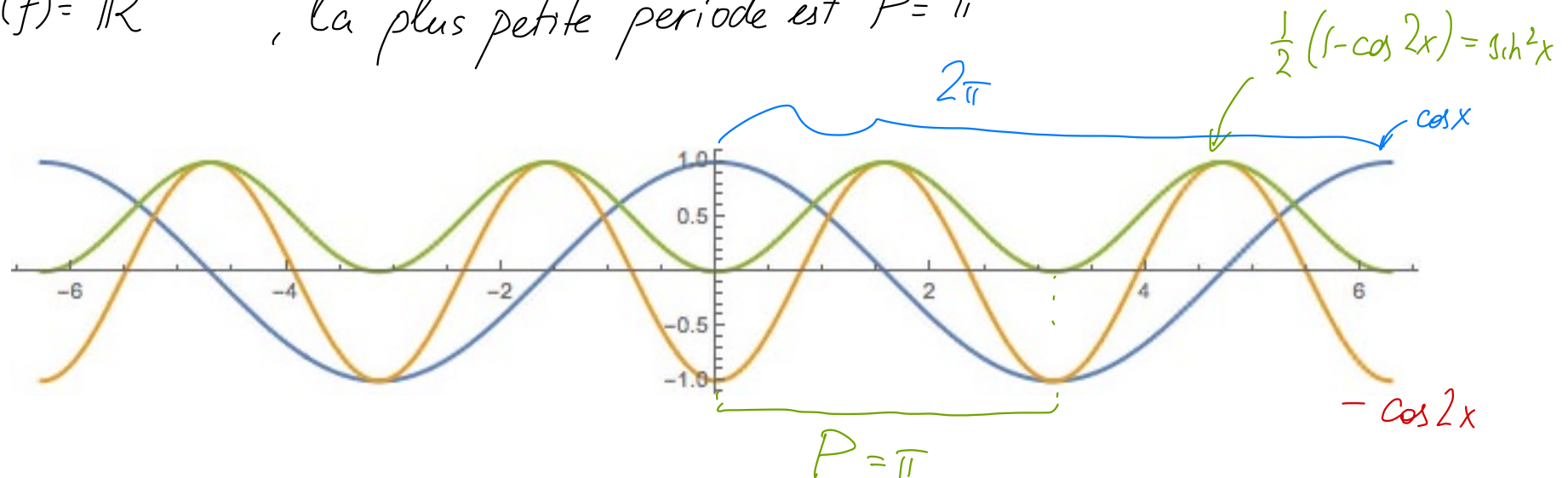
Souvent il est possible de trouver la plus petite période : $P > 0$ tel que
 $\{nP\}_{n \in \mathbb{Z}}$ contient l'ensemble des périodes de la fonction périodique.

Ex. $f(x) = \sin^2 x, x \in \mathbb{R}$.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$D(f) = \mathbb{R}$, la plus petite période est $P = \pi$



Ex $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$

$$f(x + P) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\begin{matrix} \text{rationnel} & + & \text{rationnel} & = & \text{rationnel} \\ \text{irrationnel} & + & \text{rationnel} & = & \text{irrationnel} \end{matrix}$

Par exemple, $P=1$, mais aussi

$\forall P \in \mathbb{Q}$ est une période de f .

f est périodique, mais elle n'admet pas de plus petite période.

(7) $f: E \rightarrow F$ est majorée (minorée) sur $A \subset E$ si l'ensemble $f(A) \subset \mathbb{R}$ est majoré (minoré).

Si $f(x)$ est à la fois minorée et majorée sur A , alors elle est bornée sur A .

$$\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)|_{x \in A} \leq M.$$

(8) Borne supérieure $\sup_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{dit}}{=} \sup \{f(x), x \in A\}$

Borne inférieure $\inf_{x \in A} f(x) \stackrel{\text{dit}}{=} \inf \{f(x), x \in A\}$

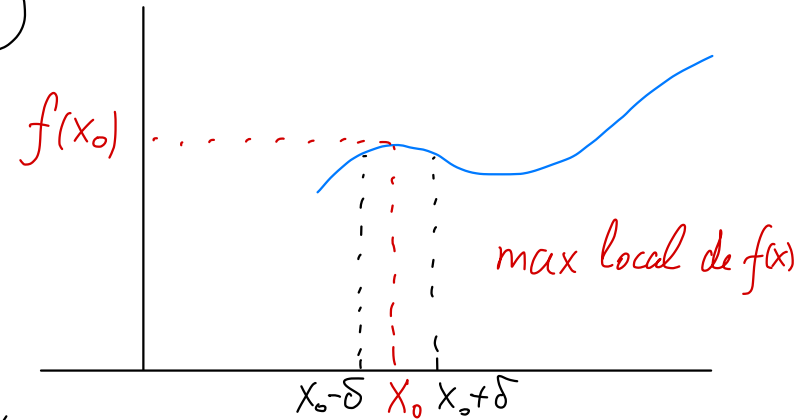
Ex. $f(x) = x^2 + 3$ sur $A =]0, 1[\Rightarrow f(x)$ est bornée.

$$\sup_{x \in A} f(x) = \sup \{x^2 + 3, x \in]0, 1[\} = 4; \quad \inf_{x \in A} f(x) = \inf \{x^2 + 3, x \in]0, 1[\} = 3$$

$$\begin{aligned} \inf_{x \in A} f(x) &\notin f(A) =]3, 4[\\ \Rightarrow \sup_{x \in A} f(x) &\notin f(A) =]3, 4[\end{aligned}$$

(9) Maximum et minimum local d'une fonction.

$f: E \rightarrow F$, $x_0 \in E$. Alors f admet un max (min) local au point x_0 , s'il existe $\delta > 0$: pour tout $x \in D(f)$ tel que $|x - x_0| \leq \delta$, on a $f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) \geq f(x_0)$)



(10) Maximum et minimum global d'une fonction

Soit $f: E \rightarrow F$ et M (m) $\in \{f(x), x \in E\} = f(E)$, tel que

$$\forall x \in E \text{ on a } \underline{f(x) \leq M} \quad (\underline{f(x) \geq m})$$

Alors M est le maximum global (m est le minimum global) de f sur E

Si $f(x_0) = M$
 ($f(x_0) = m$) $\Rightarrow$ la fonction f atteint son max global sur E au point x_0
min

Remarque. (1) Si $\max_{x \in E} f(x)$ ($\min_{x \in E} f(x)$) existe $\Rightarrow$

f est majorée (minorée) sur E et $\sup_{x \in E} f(x) = \max_{x \in E} f(x)$ ($\inf_{x \in E} f(x) = \min_{x \in E} f(x)$)

(2) Une fonction bornée sur E n'atteint pas forcément son min ou max sur E .

Ex. $f(x) = x^2 + 3$ sur $E =]0, 1[$ est bornée, mais elle n'atteint ni son minimum, ni son maximum sur E .

(11) Fonction $f: E \rightarrow F$ est surjective

si $\forall y \in F$ il existe au moins un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

(12) Fonction $f: E \rightarrow F$ est injective

si $\forall y \in F$ il existe au plus un $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

($\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2), x_1, x_2 \in E \Rightarrow x_1 = x_2$).

Remarque. Si $f: E \rightarrow F$ n'est pas surjective $\Rightarrow$ il faut réduire l'ensemble arrivée F

Si $f: E \rightarrow F$ n'est pas injective $\Rightarrow$ il faut réduire l'ensemble de départ E .

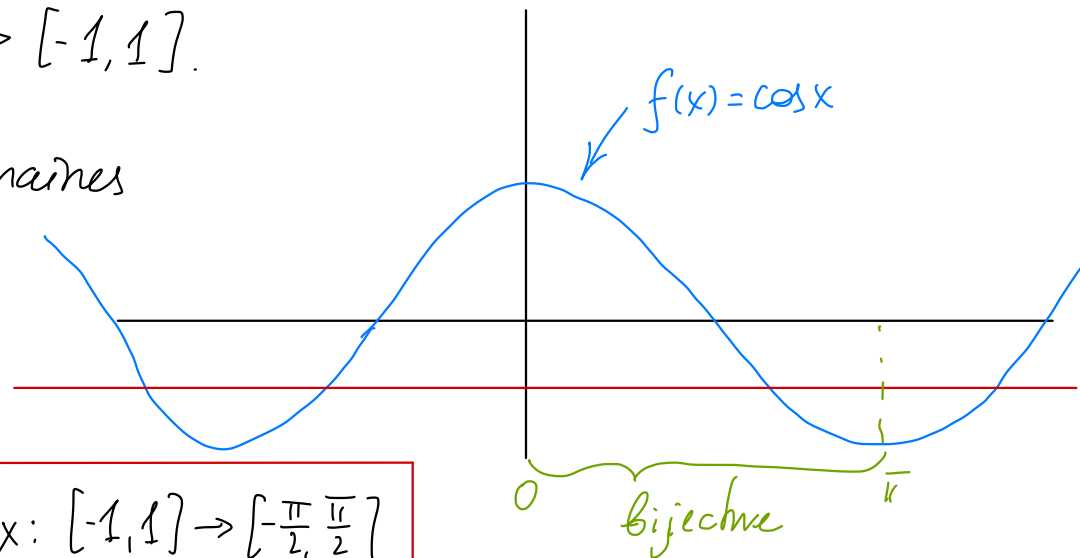
(13) Si $f: E \rightarrow F$ est à la fois injective et surjective, alors elle est bijective.

(14) Si $f: E \rightarrow F$ est bijective, on peut définir la fonction réciproque -105-
par la formule $y = f(x), x \in E \Leftrightarrow x = f^{-1}(y), y \in F$

Ex. $f(x) = \cos x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ n'est pas injective

Elle est bijective sur $[0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$.

Par convention, on choisit les domaines suivants pour définir les fonctions trigonométriques réciproques :



$$\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \leadsto \operatorname{Arcsin} x : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\cos x : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \leadsto \operatorname{Arccos} x : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

$$\operatorname{tg} x : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow \mathbb{R} \leadsto \operatorname{Arctg} x : \mathbb{R} \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\operatorname{ctg} x :]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R} \leadsto \operatorname{Arctg} x : \mathbb{R} \rightarrow]0, \pi[$$

-106-

Les graphiques des fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite $x=y$.

Ex. $f(x) = 2\sinh(1-x^2)$ Trouver un plus grand ensemble où $f(x)$ est bijective, donner une fonction réciproque et son domaine de définition.

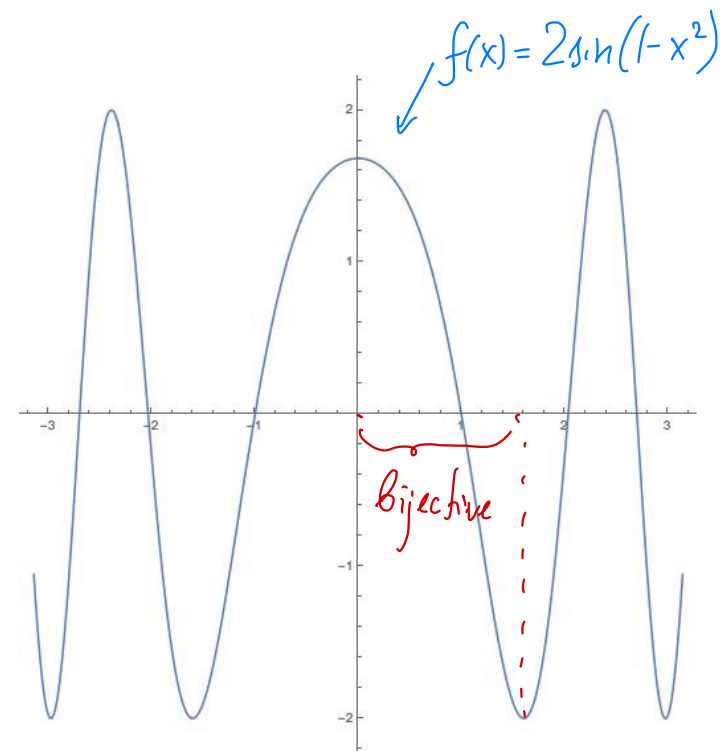
$$y = 2\sinh(1-x^2) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 1-x^2 \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -1-\frac{\pi}{2} \leq -x^2 \leq -1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow 1-\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq 1+\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1+\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\sqrt{1+\frac{\pi}{2}} \leq x \leq \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$$

Il faut choisir une moitié de l'intervalle pour assurer la bijectivité de x^2 .

Par exemple, on choisit $0 \leq x \leq \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}$

$$\Rightarrow \underline{D(f) = [0, \sqrt{1+\frac{\pi}{2}}]}$$

$\Rightarrow f$ est bijective, où
on choisit $F = f(D)$



$$2 \sinh(1-x^2) = y \Rightarrow \sinh(1-x^2) = \frac{y}{2}$$

$$\Rightarrow 1-x^2 = \operatorname{Arcsinh} \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$x^2 = 1 - \operatorname{Arcsinh} \frac{y}{2} \Rightarrow$$

$$x = \sqrt{1 - \operatorname{Arcsinh} \frac{y}{2}} \text{ puisque } 0 \leq x \leq \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \underline{f^{-1}(x) = \sqrt{1 - \operatorname{Arcsinh} \frac{x}{2}}}$$

$$\mathcal{D}(f^{-1}) = ? \quad \mathcal{D}(f^{-1}) = f(\mathcal{D})$$

$$f(0) = 2 \sinh(1-0) = 2 \sinh 1$$

$$f(\sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}) = 2 \sinh(1 - (1 + \frac{\pi}{2})) = 2 \sinh(-\frac{\pi}{2}) = -2$$

$$f: [0, \sqrt{1 + \frac{\pi}{2}}] \rightarrow [-2, 2 \sinh 1]$$

$$\underline{\mathcal{D}(f^{-1}) = [-2, 2 \sinh 1]}$$

